



CIMAT

EL CONCEPTO DE POTENCIAL EN JUEGOS COOPERATIVOS

Francisco Sánchez Sánchez

Segundo Encuentro CIMAT-ICIMAF



CIMAT

1. EJEMPLOS DE PROBLEMAS

- Juegos de redes: sistema de riego, drenaje, sistema de agua potable, teléfono, cablevisión.
- Finanzas
 - Inversiones con rendimientos crecientes
 - Seguros
- Bancarrota
 - Racionamiento
 - Impuestos
 - Servicios
- Otros
 - Aeropuerto
 - Elevador
 - Profesor visitante



CIMAT

2. JUEGOS COOPERATIVOS

$$N = \{1, \dots, n\}$$

Definición 1. Un *juego* es una pareja (N, v) , donde $N = \{1, \dots, n\}$ es un conjunto finito y

$$v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $v(\emptyset) = 0$.

$v(S)$ ganancia conjunta que obtiene la coalición S si esta se forma.
Problema:

$$v \longmapsto x \in \mathbb{R}^N$$



CIMAT

2.1. Soluciones.

Definición 2. Una *solución* es una función,

$$\varphi : G^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

2.2. Ejemplo. El valor de Shapley es la función $Sh : G^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida por:

$$Sh_i(N, v) = \sum_{T \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{t!(n-t-1)!}{n!} (v(T \cup \{i\}) - v(T))$$



CIMAT

2.3. Axiomas.

Definición 3 (Eficiencia). Diremos que la solución φ es eficiente si y sólo si

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$$

para todo $v \in G$.

Definición 4 (Simetría). Diremos que la solución φ es simétrica si y sólo si

$$\theta * \varphi(v) = \varphi(\theta * v)$$

para todo $\theta \in \Theta, v \in G$.



CIMAT

Definición 5. Diremos que el jugador i es *jugador nulo* en v si

$$v(S \cup \{i\}) = v(S)$$

para todo $S \subseteq N$.

Definición 6 (Nulidad). Diremos que la solución φ satisface nulidad si $\varphi_i(v) = 0$ para todo jugador nulo en v .

Teorema 1 (Shapley, 1953). Una solución satisface los axiomas de eficiente, simetría, aditividad y nulidad si y sólo si es el valor de Shapley.



CIMAT

3. POTENCIAL DE UN JUEGO

$$(N, v)$$

$$G = \{(S, v_S) : S \subseteq N \text{ y } v_S = v|_S\}$$
$$P : G \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\sum_{j \in S} [P(S, v_S) - P(S \setminus \{j\}, v_{S \setminus \{j\}})] = v(S)$$

donde $P(\emptyset, v_\emptyset) = 0$.

$$P(S, v_S) = \frac{v(S) + \sum_{j \in S} P(S \setminus \{j\}, v_{S \setminus \{j\}})}{s}$$

donde $s = |S|$.

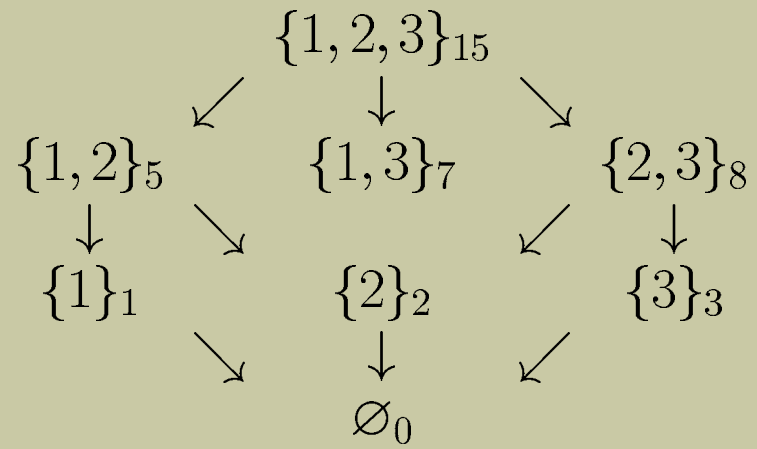


CIMAT

$$P(S, v_S) - P(S \setminus \{j\}, v_{S \setminus \{j\}}) = Sh_j(S, v_S).$$

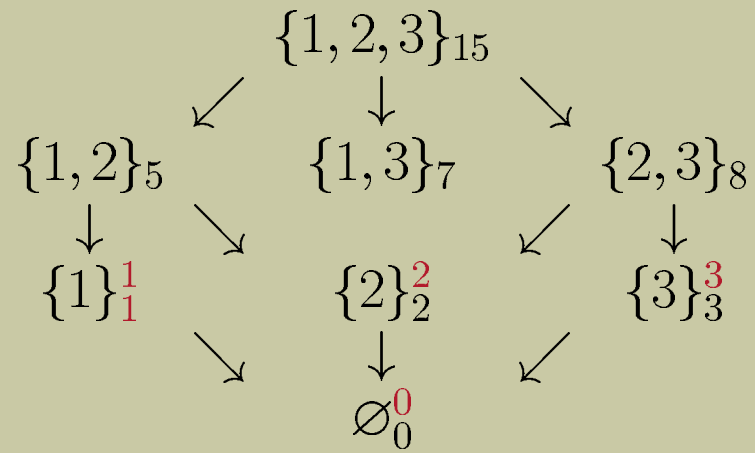


CIMAT



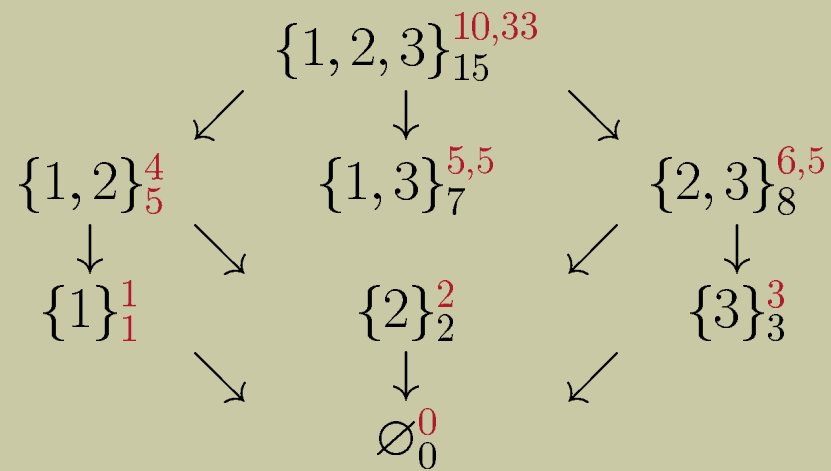


CIMAT





CIMAT





CIMAT

Sea

$$P : G \rightarrow G$$

entonces,

Teorema 2. *P es lineal, simétrico, biyectivo y positivo. Además, sus únicos puntos fijos son los juegos aditivos.*



CIMAT

4. POTENCIAL PARA EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

	Trabajadores
Actividades	$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$

\mathcal{M} conjunto de trabajos,
 \mathcal{N} conjunto de trabajadores
 A matriz de eficiencia

Problema: (M, N, A) o (M, N) ,

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} a_{ij} x_{ij} \\ & \text{s.a.} \\ & \quad \sum_{i \in M} x_{ij} = 1 \quad j \in N \\ & \quad \sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad i \in M \\ & \quad x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \end{aligned}$$

donde $M \subseteq \mathcal{M}$, $N \subseteq \mathcal{N}$ y $A = \mathcal{A}|(M, N)$.

$$\mathcal{P} = \{(M, N, A) : M \subseteq \mathcal{M}, N \subseteq \mathcal{N} \text{ tal que } |M| = |N| \text{ y } A = \mathcal{A}|(M, N)\},$$

$$L_P : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$$



CIMAT

Definición 7. *Potencial de un problema de asignación,*

$$Pot : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $Pot(\emptyset, \emptyset) = 0$ y

$$\sum_{j \in N} [Pot(M, N) - \overline{Pot(N \setminus \{j\})}] = L_P(M, N)$$

donde

$$\overline{Pot(N \setminus \{j\})} = \sum_{i \in M} \frac{Pot(M \setminus \{i\}, N \setminus \{j\})}{n}.$$

$$Pot(M, N) = \frac{n L_P(M, N) + \sum_{j \in N} \sum_{i \in M} Pot(M \setminus \{i\}, N \setminus \{j\})}{n^2}$$

$$\varphi_j(M, N) = Pot(M, N) - \overline{Pot(N \setminus \{j\})}$$



CIMAT

Ejemplo.

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 & 2 \\ 7 & 8 & 6 \\ 10 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Cuando falta el trabajador 1:

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}_{14,5}^{16} \quad \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{10,5}^{13} \quad \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{10}^{11}$$



CIMAT

Cuando falta el trabajador 2:

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}_{13,5}^{15} \quad \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}_{12}^{12} \quad \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}_{14,5}^{16}$$

Cuando falta el trabajador 3:

$$\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}_{17}^{17} \quad \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}_{17,5}^{20} \quad \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}_{15,5}^{18}$$



CIMAT

Así,

$$\left[\begin{array}{ccc} 9 & 10 & 2 \\ 7 & 8 & 6 \\ 10 & 1 & 3 \end{array} \right]_{22,555}^{26}$$

$$\overline{Pot(S \setminus \{1\})} = (14,5 + 10,5 + 10)/3 = 11.667$$

$$\overline{Pot(S \setminus \{2\})} = (13,5 + 12 + 14,5)/3 = 13.333$$

$$\overline{Pot(S \setminus \{3\})} = (17 + 17,5 + 15,5)/3 = 16.667$$

de donde



CIMAT

$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} 22,555 - 11.667 \\ 22,555 - 13.333 \\ 22,555 - 16.667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.888 \\ 9.222 \\ 5.888 \end{bmatrix} .$$



CIMAT

5. PROPIEDADES DEL POTENCIAL DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

$$\widehat{L}_M(S) = \sum_{\{R \subseteq M: |R|=|S|\}} L_P(R, S).$$

Teorema 3. Para $(M, N) \in \mathcal{P}$

$$Pot(M, N) = \sum_{S \subseteq N} \frac{1}{s} \left[\frac{s!(n-s)!}{n!} \right]^2 \widehat{L}_M(S).$$



CIMAT

Teorema 4. *El salario para j*

$$\varphi_j(M, N) = \sum_{\{S \subseteq N: j \in S\}} \frac{1}{s} \left[\frac{s!(n-s)!}{n!} \right]^2 \left[\widehat{L}_M(S) - \widehat{L}_M(N \setminus S) \right].$$



CIMAT

$$L_M(\widehat{\{1, 2, 3\}}) = 26$$

$$L_M(\widehat{\{1, 2\}}) = 17 + 20 + 18 = 55$$

$$L_M(\widehat{\{1, 3\}}) = 15 + 12 + 16 = 43$$

$$L_M(\widehat{\{2, 3\}}) = 16 + 13 + 11 = 40$$

$$L_M(\widehat{\{1\}}) = 9 + 7 + 10 = 26$$

$$L_M(\widehat{\{2\}}) = 10 + 8 + 1 = 19$$

$$L_M(\widehat{\{3\}}) = 2 + 6 + 3 = 11$$

y por lo tanto,

$$\varphi_1(A) = \frac{1}{9}(26 - 40) + \frac{1}{18}(55 - 11) + \frac{1}{18}(43 - 19) + \frac{1}{3}26 = 10,888.$$



CIMAT

$$\Theta = \{\theta : N \rightarrow M \mid \theta \text{ bijective}\}$$

$$v^\theta(S) = L(\theta(S), S)$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{\theta \in \Theta} \phi(v^\theta)$$

Teorema 5. Para $A \in \mathcal{P}$

$$\varphi(A) = \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in \Theta} Sh(N, v^\theta) = Sh(N, \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in \Theta} v^\theta).$$



CIMAT

Teorema 6. Para $A \in \mathcal{P}$

- a) $\varphi(PA) = \varphi(A)$.
- b) $\varphi(AP) = P\varphi(A)$.
- c) $\varphi(\lambda A) = \lambda\varphi(A)$
- d) Si $A_k \leq A_j$ entonces $\varphi_k(A) \leq \varphi_j(A)$.
- e) $\varphi(P) = \mathbf{1}$.

$$\varphi(\text{diag}(d)) \neq d$$



CIMAT

6. OTRAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

$$\sum_{j \in N} [Pot^{mc}(M, N) - mc(\{Pot^{mc}(M \setminus \{i\}, N \setminus \{j\})\}_{i \in M})] = L_P(M, N)$$

de donde

$$Pot^{mc}(M, N) = \frac{L_P(M, N) + \sum_{j \in N} mc(\{Pot^{mc}(M \setminus \{i\}, N \setminus \{j\})\}_{i \in M})}{n}.$$

$$mc(\{14,5, 10,5, 10\}) = 10,5$$

$$mc(\{13,5, 12, 14,5\}) = 13,5$$

$$mc(\{17, 17,5, 15,5\}) = 17$$

Así,

$$Pot^{mc}(\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}) = (26 + 10,5 + 13,5 + 17)/3 = 22.333$$



CIMAT

$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} 22,333 - 10,5 \\ 22,333 - 13,5 \\ 22,333 - 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.833 \\ 8.833 \\ 5.333 \end{bmatrix}$$



CIMAT

7. DISTRIBUCIÓN DE COSTOS EN EL CASO CONTINUO

Definición 8. *El juego es una pareja (f, z) donde*

- $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$
- $z \in \mathbb{R}_+^n$.

Definición 9. *Una solución es una función $\varphi : F \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $z \cdot \varphi(f, z) = f(z)$.*

Definición 10. *Un potencial es una función diferencial*

$$F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que $z \cdot \nabla F(z) = f(z)$ para toda $z \in \mathbb{R}_+^n$.



CIMAT

7.1. Qué se obtiene:

Dado f

a) Existe un único potencial F .

b) Hay un único campo vectorial integrable ψ_f sobre \mathbb{R}_+^n tal que

$$z \cdot \psi_f(z) = f(z).$$

c) $F(z) = \int_0^1 \frac{1}{t} f(tz) dt$



CIMAT

Referencias

Hart, S., and Mas-Colell, A. (1989) “Potential, Value, and Consistency,” *Econometrica*, 57, 589-614. Co., New York.

Hart, S., and Mas-Colell, A. (1988) “The potential of the Shapley value”, *The Shapley value. Essays in honor of Lloyd S. Shapley*, 127-138.

Shapley L.S. (1953). “A value for n -person games” , in *Contributions to the Theory of Games II*, pp. 307-312, Annals of Mathematics Studies Vol. 28, Princeton University Press, Princeton.